ASAL SAYILAR ~ POZİTİF TAM BÖLENLER VE FAKTÖRİYEL

ASAL SAYI : 1 ve kendisinden başka böleni olmayan 1 den büyük sayılara asal sayı adını veriyoruz.

Asal olmayan 1 den büyük sayılara bileşik sayı adını veriyoruz.

Asal sayılar : $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$

- En küçük asal sayı 2 dir.
- Asal sayılar sonsuz tanedir.
- Asal sayıları veren bir formül yoktur. Ancak aşağıda belirtilen şekilde asal olup olmadığını belirleyebiliriz.

⊙ mesela 143 sayısı için

$\sqrt{143} \cong 11,9$ olduğundan bu değere kadar olan asal sayılar yazılır.

$\underbrace{2, 3, 5, 7, 11}$

143 hiç birine bölünmezse asal sayıdır.

ama 143 sayısı 11 ile bölündüğünden asal sayı değildir.

⊙ mesela 97 sayısı için

$\sqrt{97} \cong 9,8$ olduğundan bu değere kadar olan asal sayılar yazılır.

$\underbrace{2, 3, 5, 7}$

97 hiç birine bölünmediğinden asal sayıdır.

- Asal sayılardan sadece biri çifttir, oda "2" dir.
- Asal sayıların çarpanları kendisi ve 1 dir.

$x \cdot y = 37$

1	37
37	1
-1	-37
-37	1

1) x ve y doğal sayılardır.

$x^2 = 4y^2 + 29$ ise $x+y$ nedir?

$x^2 - 4y^2 = 29$

$\underbrace{(x-2y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+2y)}_{29} = 29$

$x - 2y = 1$
$+\ x + 2y = 29$

$2x = 30 \Rightarrow x = 15,\ y = 7 \} \ x + y = 22$

2) $a, b \in N^+$

$a^2 - b^2 = 41$ ise $a.b$ nedir?

$\underbrace{(a-b)}_{1} \cdot \underbrace{(a+b)}_{41} = 41$

$a - b = 1$
$+\ a + b = 41$

$2a = 42 \Rightarrow a = 21,\ b = 20 \} \ a.b = 420$

3) x ve y sayma sayılarıdır.

$(x-3y) \cdot (x+y+2) = 23$ olduğuna göre $x-y$ nedir?

$\underbrace{(x-3y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+y+2)}_{23} = 23$

$-/\ x - 3y = 1$
$x + y = 21$

$-x + 3y = -1$
$+\ x + y = 21$

$4y = 20 \Rightarrow y = 5$
$x = 16$

$16 - 5 = 11$

4) x, y, z asal sayılardır.

$(x-y) \cdot z = 23$ ise $x+y+z$ toplamı nedir?

$\underbrace{(x-y)}_{1} \cdot \underset{23}{z} = 23$

$x - y = 1 \Rightarrow 3 + 2 + 23 = 28$
$x = 3,\ y = 2$

• **Aralarında asal sayılar:** 1 den başka ortak böleni olmayan iki veya daha fazla sayıya aralarında asal sayılar adını veriyoruz.

:) Sayıların aralarında asal olması için asal olmalarına gerek yoktur.

(3, 7)
(3, 11)
(12, 7)
(3, 6, 11)
⋮

NOT:) a ile b aralarında asal ve x ile y aralarında asal ise

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

$a = x$
$b = y$ dir.

5) a ile b aralarında asal ve $\frac{a}{b} = \frac{48}{56}$ ise a+b nedir?

$\frac{a}{b} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7} \Rightarrow \begin{matrix} a=6 \\ b=7 \end{matrix} \Big\} \; 6+7=13$

6) (a−b) ile (3a+b) aralarında asal ve $\frac{a-b}{3a+b} = \frac{9}{51}$ ise a.b nedir?

$\frac{a-b}{3a+b} = \frac{3}{17} \Rightarrow a-b=3$
$3a+b=17$
$+$
$4a=20 \Rightarrow a=5 \quad b=2$
$a.b=10$

7) (x+3y) ile (2x−y) aralarında asal iki doğal sayıdır.

$\frac{x+3y}{2x-y} = \frac{78}{30}$ ise x+y nedir?

$\frac{x+3y}{2x-y} = \frac{78}{30} = \frac{13}{5} \Rightarrow$ $-2/\; x+3y=13$
$2x-y=5$
$-7y=-21 \Rightarrow y=3$
$x=4$
$x+y=7$

• **BÖLEN SAYISI:**

a, b, c farklı asallar, m, n, k pozitif tam sayılar olmak üzere

$A = a^m . b^n . c^k$

Pozitif tam bölen sayısı : $(m+1).(n+1).(k+1)$

Negatif tam bölen sayısı : $(m+1).(n+1).(k+1)$

Tam bölen sayısı : $2.(m+1).(n+1).(k+1)$

• A nın pozitif tam bölenlerinin toplamı:

$$\frac{1-a^{m+1}}{1-a} \cdot \frac{1-b^{n+1}}{1-b} \cdot \frac{1-c^{k+1}}{1-c}$$

ya da:

$$(1+a+a^2+\dots+a^m).(1+b+b^2+\dots+b^n).(1+c+c^2+\dots+c^k)$$

• Tam bölen sayıları toplamı daima sıfırdır.

• Pozitif tam bölenler çarpımı : $A^{\frac{P.B.S}{2}}$

• A dan küçük ya da A ya eşit olan A ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını A(x) ile ifade edersek:

$$A(x) = A.\left(1-\frac{1}{a}\right).\left(1-\frac{1}{b}\right).\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

A dan küçük ya da A ya eşit olan A ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların toplamı : $\frac{A}{2} . A(x)$

• **Pozitif tek bölen:** Asal çarpanlarına ayrıldıktan sonra tabanı çift olan atılır ve geriye kalanların pozitif bölen sayısına bakılır.

• **Pozitif çift bölen:** Pozitif tam bölenlerden pozitif tek bölenler çıkarılarak bulunur. ya da 2 parantezine alınarak hesaplanır.

$A = 2.(x)$
⇓
pozitif bölen sayısı

8) 120 sayısının

a) Pozitif tam bölen sayısı kaçtır?

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 . 3^1 . 5^1$

$P.B.S = 4.2.2 = 16$

b) Tam bölen sayısı kaçtır?

$2.16 = 32$

c) Asal bölen sayısı kaçtır?

$\{2,3,5\} \Rightarrow 3$ tanedir.

d) Asal bölenlerin toplamı nedir?

$2+3+5 = 10$

e) Asal olmayan pozitif tam bölen sayısı kaçtır?

$16 - 3 = 13$

f) Asal olmayan tam bölen sayısı kaçtır?

$32 - 3 = 29$

g) Pozitif tam bölenlerin toplamı kaçtır?

$$= \frac{1-2^4}{1-2} \cdot \frac{1-3^2}{1-3} \cdot \frac{1-5^2}{1-5}$$

$$= \frac{-15}{-1} \cdot \frac{-8}{-2} \cdot \frac{-24}{-4} = 15.4.6 = 360$$

ya da $(1+2+2^2+2^3).(1+3^1).(1+5^1)$

$= 15.4.6$

$= 360$

h) Asal olmayan pozitif tam bölenlerin toplamı nedir?

{Pozitif tam bölen toplamı} − {asal bölenlerin toplamı}

$= 360 - 10$

$= 350$

ı) Asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı nedir?

120

~~1 — −1~~
2 — −2
3 — −3
~~4 — −4~~
5 — −5
~~6 — −6~~
~~8 — −8~~
~~10 — −10~~
~~12 — −12~~
~~15 — −15~~
~~20 — −20~~
~~24 — −24~~
~~30 — −30~~
~~40 — −40~~
~~60 — −60~~
~~120 — −120~~

} −10

i) Pozitif tek bölen sayısı nedir?

$2^3 . 5^1 . 3^1 \Rightarrow 2.2 = 4$

j) Tek bölen sayısı nedir?

$2.4 = 8$
↓
negatiflerde var.

k) Pozitif çift bölen sayısı kaçtır?

$120 = 2.(60)$

$60 = 2^2 . 3^1 . 5^1 \Rightarrow P.B.S = 3.2.2 = 12$

l) Asal olmayan pozitif çift bölen sayısı nedir?

$12 - 1 = 11$

(asal olan ve çift olan bir tane sayı var (2))

m) Pozitif tam sayı bölenlerinden kaç tanesi 6 nın katıdır?

$120 = 6.(20)$

$20 = 2^2 . 5^1 \Rightarrow P.B.S = 3.2 = 6$

9) 6.5^x sayısını bölebilen 40 tane pozitif tam sayı olduğuna göre x nedir?

$3^1.2^1.5^x$

$2.2.(x+1)=40$

$4.(x+1)=40$

$x+1=10 \Rightarrow x=9$

10) $40\underbrace{0....0}_{n\ tane}$ sayısının 70 tane tam böleni varsa n kaç olmalıdır?

$2^2.10^n = 2^2.5^n.2^n$

$=2^{n+2}.5^n$

$2.(n+3).(n+1)=70$

$\underbrace{(n+3)}_{7}.\underbrace{(n+1)}_{5}=35$

$n=4$

11) $8^n.30$ sayısının asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 65 ise n kaçtır?

$2^{3n}.3^1.2^1.5^1 = 2^{3n+1}.3^1.5^1$

$(3n+2).2.2=68$

$(3n+2).4=68$

$3n+2=17$

$3n=15 \Rightarrow n=5$

12) n bir doğal sayıdır.

12.20^n sayısının 144 tane tam böleni varsa n kaçtır?

$2^2.3^1.2^{2n}.5^n \Rightarrow 2^{2n+2}.3^1.5^n$

$2.(2n+3).2.(n+1)=144$

$(2n+3).(n+1)=36$

$2n^2+5n+3=36$

$2n^2+5n-33=0$

$2n \quad +11$

$n \quad -3$ $\Rightarrow n \neq -\frac{11}{2}$

$n=3$

13) $x, y \in N^+$

$X.48=y^3$ ise x+y en az kaçtır?

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$X.2^4.3^1=y^3$

$2^2 \; 3^2$

☺ sağ taraf bir sayının küpü olduğundan sol tarafıda küplü ifadelere tamamlamak lazım!

$X=36$

$2^6.3^3=y^3 \Rightarrow (2^2.3)^3=y^3$

$\Rightarrow y=12$

$x+y=48$

14) $x, y \in N^+$

$360.x=y^2$ ise x+y en az kaçtır?

$2^3.3^2.5^1.X=y^2$

$2^1 \; 5^1$

$X=10$ ve $2^4.3^2.5^2=y^2$

$(2^2.3.5)^2=y^2$

$\Rightarrow y=60$ $\quad x+y=70$

15) x ve y doğal sayılardır.

$90.x=(y+3)^3$ ise y en az kaçtır?

$3^2.5^1.2^1.X=(y+3)^3$

$5^2 \; 2^2 \; 3^1$

$3^3.5^3.2^3=(y+3)^3$

$(3.5.2)^3=(y+3)^3$

$30^3=(y+3)^3$

$y+3=30$

$y=27$

FAKTÖRİYEL

1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n! adını veriyoruz.

$n! = n.(n-1).(n-2)....3.2.1$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2.1 = 2$

$3! = 3.2.1 = 6$

$4! = 4.3.2.1 = 24$

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

⋮

16) $\frac{14!+13!}{15!+14!}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{14.13!+13!}{15.14.13!+14.13!} = \frac{13!(14+1)}{13!.14.(15+1)} = \frac{15}{14.16} = \frac{15}{224}$$

17) $\frac{12!-11!}{10!+9!}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{12.11!-11!}{10.9!+9!} = \frac{11!(12-1)}{9!.(10+1)} = \frac{11.10.9!.11}{9!.11} = 110$$

18) $\frac{(n+1)!-2.n!}{(n+1)!+n!}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{(n+1).n!-2.n!}{(n+1).n!+n!} = \frac{n!.(n+1-2)}{n!.(n+1+1)} = \frac{n-1}{n+2}$$

19) $\frac{(n+1)!-2.(n-1)!}{n!-(n-1)!} = 7$ ise n kaçtır?

$$\frac{(n+1).n.(n-1)!-2.(n-1)!}{n.(n-1)!-(n-1)!} = \frac{(n-1)!.(n^2+n-2)}{(n-1)!.(n-1)}$$

$$\frac{(n+2).(n-1)}{(n-1)} = 7$$

$n+2 = 7 \Rightarrow n = 5$

20) a ve b birer pozitif tam sayıdır.

$\frac{a!}{b!} = 30$ ise a+b nin alacağı değerler nedir?

$a! = 30.b!$

$a! = 30.29! \Rightarrow b = 29,\ a = 30 \}\ a+b = 59$

$a! = 6.5.4! \Rightarrow b = 4,\ a = 6 \}\ a+b = 10$

21) $1!+2!+3!+....+50!$ toplamının birler basamağında hangi rakam vardır?

$1+2+6+24+\underbrace{120+720+....}$

5 ve 5 ten sonrasının sonu hep sıfırdır.

$= 1+2+6+24 = 33$ → **3**

22) $0!+1!+2!+....+150!$ toplamının 28 ile bölümünden kalan nedir?

$1+1+2+6+24+120+720+\underbrace{5040+....}$

içinde 7 ve 4 olduğundan 28 ile tam bölünür

874 ÷ 28 = 31
−84
034
−28
6 → **6**

23) $A = 11!$ olmak üzere

$11!+10!+9!$ toplamının A cinsinden değeri nedir?

$11.10.9!+10.9!+9! = 9!.(110+10+1)$

$= 9!.121 = \frac{A}{11.10}.121$

$A = 11.10.9! \Rightarrow 9! = \frac{A}{11.10}$

$= \frac{11A}{10}$

NOT :) a bir asal sayı ve $b, x, n \in Z^+$ için $n! = a^x . b$ ifadesinde x in alabileceği en büyük değer sorulduğunda n sayısı a ve a nın kuvvetlerine bölünür ve oluşan bütün bölümler toplanır.

$n \,\lfloor a$ → (k) $\lfloor a$ → (l) $\lfloor a$ → (m) $\lfloor a$ → (n) .... $\lfloor a$ → (z)

x in en büyük değeri : $k + l + m + n + \dots + z$

24) $a, b \in Z^+$ ve $24! = 3^a . b$ ise a nın alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değeri nedir?

$24 \,\lfloor 3$ → (8) $\lfloor 3$ → (2)

en fazla : 10
en az : 1

$\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ değerlerinin hepsini alır.

25) $x, y \in Z^+$ ve $23! = 4^x . y$ ise x in en büyük değeri nedir?

$23! = 2^{2x} . y$

$23 \,\lfloor 2$ → 11 $\lfloor 2$ → 5 $\lfloor 2$ → 2 $\lfloor 2$ → 1

$(2x)_{max} = 19$

$\Rightarrow x = 9$ (en fazla)

26) $x, y \in Z^+$ ve $30! = 8^x . y$ ise x in alacağı en büyük değer kaçtır?

$30! = 2^{3x} . y$

$30 \,\lfloor 2$ → 15 $\lfloor 2$ → 7 $\lfloor 2$ → 3 $\lfloor 2$ → 1

$(3x)_{max} = 26$

$\Rightarrow x = 8$

27) $x, y \in N^+$ ve $24! = 3^x . y$ ise x in alacağı değerler toplamı nedir?

$24 \,\lfloor 3$ → 8 $\lfloor 3$ → 2

x en fazla : 10

$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10.11}{2} = 55$

28) $x, y \in N^+$ ve $45! = 15^x . y$ ise x en fazla kaçtır?

$45! = 3^x . 5^x . y$

:) daima tabanı büyük olana bölünür.

$45 \,\lfloor 5$ → 9 $\lfloor 5$ → 1

$x = 10$ (en fazla)

29) $\frac{44!}{3^x . 5^y}$ ifadesinin sonucu bir tam sayı olduğuna göre x+y en fazla kaçtır?

$44 \,\lfloor 3$ → 14 $\lfloor 3$ → 4 $\lfloor 3$ → 1

$x = 19$

$44 \,\lfloor 5$ → 8 $\lfloor 5$ → 1

$y = 9$

$x + y = 28$

30) 57! sayısının sonunda kaç tane sıfır vardır?

$57! = 10^x . y$

$57! = 5^x . 2^x . y$

$57 \,\lfloor 5$ → 11 $\lfloor 5$ → 2

$x = 13$ (13 tane sıfır vardır)

31) 63! − 1 sayısının sonunda kaç tane dokuz vardır?

$63! = 10^x \cdot y$

$63! = 5^x \cdot 2^x \cdot y$

63 | 5
12 | 5
2

63! in sonunda 14 tane sıfır vardır. 63! − 1 in sonundada 14 tane dokuz vardır.

32) 30! sayısı 4 tabanında yazılırsa sonunda kaç tane sıfır vardır?

$30! = 4^x \cdot y$

$30! = 2^{2x} \cdot y$

30 | 2
15 | 2
7 | 2
3 | 2
1

$(2x)_{max} = 26$

$x = 13$ (13 tane sıfır olur)